車輪のジャイロ運動

質量 m, 半径 r の車輪を図の様に中心 A から a だけ離れた点 O でつり, 角速度 ω で回転させる.

A は O の周りを角速度 Ω で水平に回転する.（ジャイロ運動）

二つの角速度 ω と Ω には簡単な関係がある事を示そう.

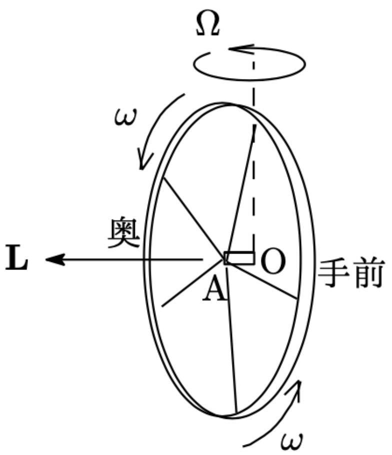
O を原点とし, 鉛直上向きを z 軸とした xyz 座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_z$ を次の様に定義する.

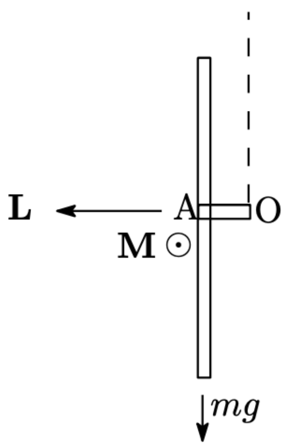
$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ \sin\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

角運動量や力のモーメントは O を基準とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a\boldsymbol{e}$ であり, 車輪の角運動量は $\boldsymbol{L} = mr^2\omega\boldsymbol{e}$ としてよい.

(1) 重力 $-mg\boldsymbol{e}_z$ が車輪に及ぼす力のモーメント $\boldsymbol{M}$ を求めよ. 点 A に質量 m が集中しているとして計算して良い.

(2) $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$ を用いて Ω と ω の満たす関係式を求めよ. 教室での演示と合致するか反芻してみよう.





解答例

(1)

$$\boldsymbol{M} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times (-mg\boldsymbol{e}_z) = a\boldsymbol{e} \times (-mg\boldsymbol{e}_z) = -mga \begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ \sin\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mga \begin{pmatrix} -\sin\Omega t \\ \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d(mr^2\omega\boldsymbol{e})}{dt} = mr^2\omega\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ \sin\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} = mr^2\omega \begin{pmatrix} -\Omega\sin\Omega t \\ \Omega\cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) との比較から， $mga = mr^2\omega\,\Omega$ が成り立つ． 即ち，車輪の元の角速度 ω とジャイロ運動の角速度 Ω は反比例する．

$$\omega\Omega = \frac{ga}{r^2}.$$

教室での演示で，車輪を勢いよく回す程 (ω を大きくする程) ゆっくりとしたジャイロ運動が観察された事を思い出そう．